Déterminant et coniques.

Leçons : 152, 171, 181.

Réf : Eiden pp. 94-96.

Thm : Soit ABC un triangle non plat. Soient M et N n'appartenant ni à (AB), ni à (BC), ni à (AC).

Notons $M_A = (AM)\cap(BC)$, $M_B = (BM)\cap(AC)$, $M_C = (CM)\cap(AB)$,
$N_A = (AN)\cap(BC)$, $N_B = (BN)\cap(AC)$, $N_C = (CN)\cap(AB)$.

Ces six points sont sur une même conique. ← ellipse (dont cercle), hyperbole, parabole, deux droites, une droite (un point mais ici non, $\emptyset$ mais ici non)

<u>Dém :</u> En coordonnées barycentriques, l'équation d'une conique est $ax^2+by^2+cz^2+dyz+ezx+fxy=0$ avec $(a,b,c,d,e,f)\neq(0,\dots,0)$. Notre repère barycentrique sera (A,B,C).

Dans ce repère si $M=(x,y,z)$ et $N=(x',y',z')$ alors : (à un facteur multi non nul près)

$M_A=(0,y,z)$, $M_B=(x,0,z)$, $M_C=(x,y,0)$, ($M_A\in(AM)$ donc $(t(x+y+z)+sx,\ sy,\ sz)$ et $M_A\in(BC)$ donc $(0,u,v)$ donc $(0,y,z)$ ✓)

$N_A=(0,y',z')$, $N_B=(x',0,z')$, $N_C=(x',y',0)$.

Il suffit donc de montrer que le système suivant (d'inconnues $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$) admet une solution non triviale, i.e. que le déterminant associé est **nul** :

$$\begin{cases} by^2+cz^2+dyz=0 & (M_A)\\ ax^2+cz^2+ezx=0 & (M_B)\\ ax^2+by^2+fxy=0 & (M_C)\\ by'^2+cz'^2+dy'z'=0 & (N_A)\\ ax'^2+cz'^2+ez'x'=0 & (N_B)\\ ax'^2+by'^2+fx'y'=0 & (N_C)\end{cases}$$

Déterminant : $\begin{vmatrix} P & Q\\ R & S\end{vmatrix}$ où $P=\begin{pmatrix}0 & y^2 & z^2\\ x^2 & 0 & z^2\\ x^2 & y^2 & 0\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix} yz & 0 & 0\\ 0 & zx & 0\\ 0 & 0 & xy\end{pmatrix}$, R comme P avec $'$, S comme Q avec $'$.

Q et S sont diagonales donc commutent. Ainsi $\begin{vmatrix} P & Q\\ R & S\end{vmatrix}=\det(SP-QR)$ (cf. la dém. plus bas).

$$SP-QR=\begin{pmatrix}0 & y'z'y^2 & y'z'z^2\\ x'z'x^2 & 0 & x'z'z^2\\ x'y'x^2 & x'y'y^2 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & yzy'^2 & yzz'^2\\ xzx'^2 & 0 & xzz'^2\\ xyx'^2 & xyy'^2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & yy'(z'y-zy') & zz'(y'z-yz')\\ xx'(xz'-x'z) & 0 & zz'(x'z-xz')\\ xx'(xy'-x'y) & yy'(x'y-xy') & 0\end{pmatrix}$$

donc $SP-QR=\underbrace{\begin{pmatrix}0 & z'y-zy' & y'z-yz'\\ xz'-x'z & 0 & x'z-xz'\\ xy'-x'y & x'y-xy' & 0\end{pmatrix}}_{\text{si on somme les colonnes on a } \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \text{ donc } \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ est dans le noyau}}\begin{pmatrix}xx' & 0 & 0\\ 0 & yy' & 0\\ 0 & 0 & zz'\end{pmatrix}$

donc $\det(SP-QR)=0$ donc $\begin{vmatrix} P & Q\\ R & S\end{vmatrix}=0$ d'où le résultat.

Dém. de $\begin{vmatrix} P & Q\\ R & S\end{vmatrix}=\det(SP-QR)$ si Q et S commutent :

- Si S est inversible alors $\underbrace{\begin{pmatrix} I_n & -QS^{-1}\\ 0_n & I_n\end{pmatrix}}_{\text{de det } 1}\begin{pmatrix} P & Q\\ R & S\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} P-QS^{-1}R & 0\\ R & S\end{pmatrix}}_{\text{de det}}$ $=\det(P-QS^{-1}R)\det(S)$ $=\det(SP-SQS^{-1}R)$ $=\det(SP-QR)$ car $QS=SQ$.
- Notre formule est continue (i.e. fct continue = fct continue) et $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$ donc c'est bon.

$M=\underset{\text{inv.}}{P}\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0_{n-r}\end{pmatrix}\underset{\text{inv.}}{Q}$, $\forall\varepsilon\neq0$ $M_\varepsilon=P\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & \varepsilon I_{n-r}\end{pmatrix}Q$ est inversible, $M_\varepsilon\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}M$.